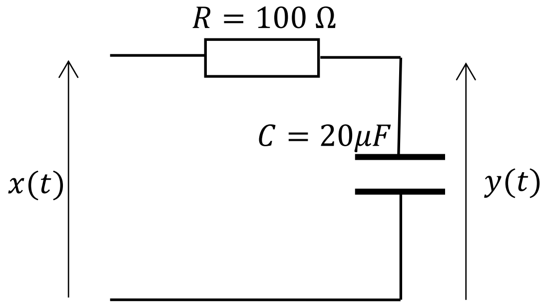
RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

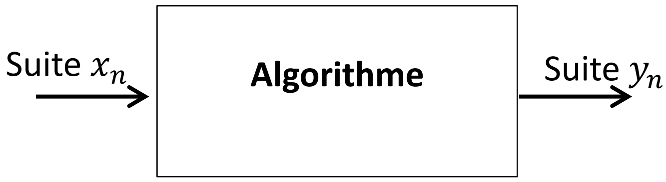
Exercice 1 : *Filtre Passe bas de type RC*

Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique. En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{0.002\, y'(t) + y(t) = x(t)}$$



On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre. Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000 Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.

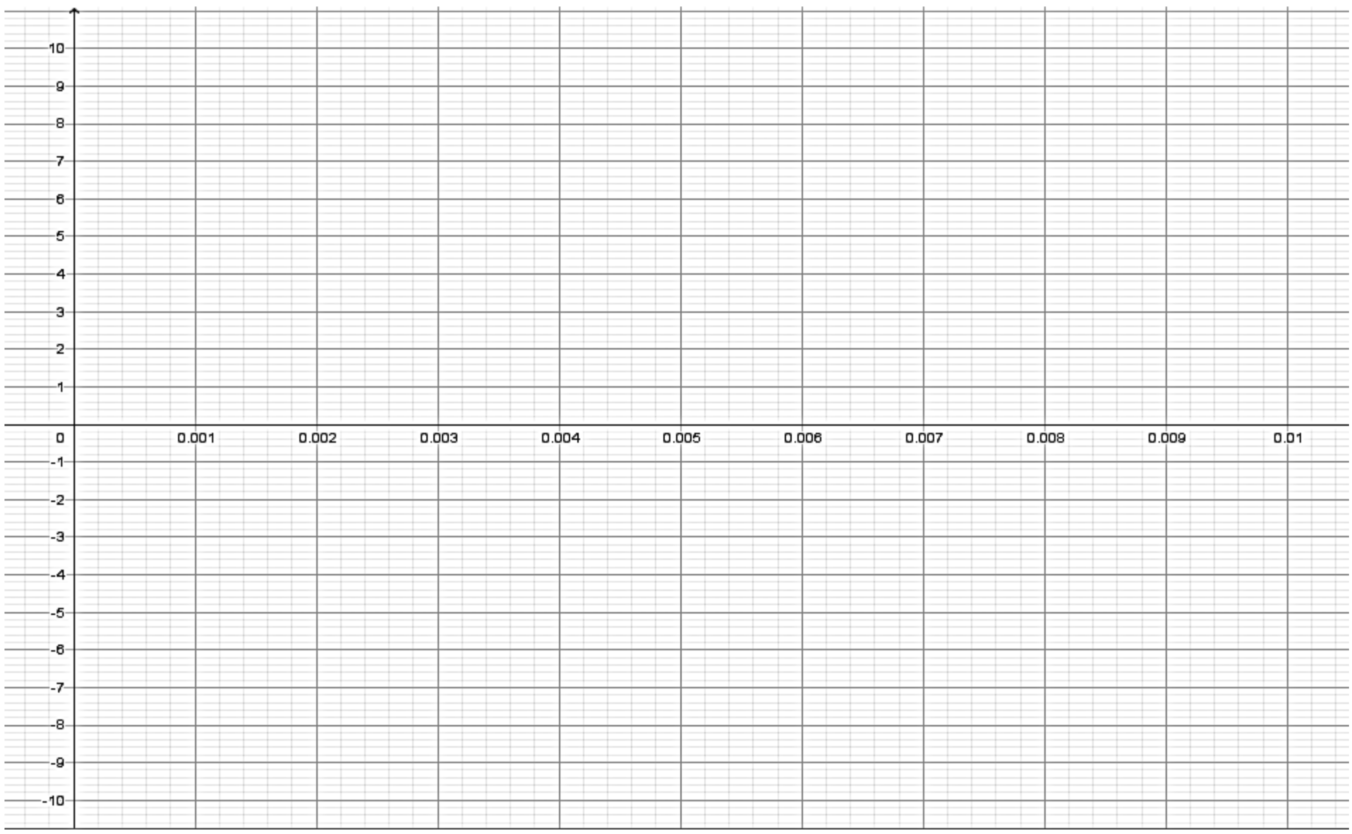


On suppose que la tension d'entrée est sinusoïdale de fréquence 100 Hz : $x(t) = 9 \sin(2\pi \times 100t)$

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :
   On arrondira les valeurs de x_n au dixième.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = n\,T_e$												
x_n	0											
y_n	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Déterminer l'équation de récurrence permettant de calculer y_n en fonction de y_{n-1} et x_n
4- Détailler le calcul de y_0 , y_1 et y_2 en arrondissant toujours les valeurs au dixième.
5- Calculer les autres termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent
6- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

<u>Exercice 2</u> : Une casserole d'eau initialement à une température de 100°C est placée dans une pièce dont la température est constante et égale à 19°C. On définit la fonction y définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $y(t) =$ température de l'eau en °C, au temps $t > 0$ exprimé en minutes. Les principes de la physique permettent d'établir que la fonction y est solution de l'équation différentielle : $10\, y' + y = 19$ avec comme condition initiale : $y(0) = 100$.

On résout cette ED numériquement en prenant une période d'échantillonnage $T_e = 1$ mn.

1- Donner la relation de récurrence qui permet de calculer y_n en fonction de y_{n-1}
2- Détailler le calcul de y_1 et y_2 en arrondissant toujours les valeurs au dixième.
3- Calculer les autres termes de la suite y_n pour compléter la ligne y_n du tableau suivant :

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$ en mn												
$\boldsymbol{y_n}$	0	100										

4- Quelle est la formule de la cellule C4 qui permet le calcul de y_1

	A	B	C
1	***n***	***t***	***yn***
2	-1		
3	0	0	100
4	1	1	
5	2	2	
6	3	3	
7	4	4	
8	5	5	
9	6	6	
10	7	7	
11	8	8	
12	9	9	
13	10	10	